Mesures et incertitudes

Il n'existe pas de mesure « parfaite » d'une grandeur expérimentale. Si la même mesure est réalisée dans ce qu'on croît être exactement les mêmes conditions, le résultat de la mesure pourra être différent : il y a **variabilité** de la mesure expérimentale.

Cette variabilité est liée à de nombreux facteurs tel que l'instrument de mesure utilisé, le choix de la méthode de mesure, les paramètres extérieurs (variation de température, échauffement des composants électroniques, ...)

I. Précision d'une mesure et chiffres significatifs

Toute mesure effectuée à l'aide d'un appareil donne un résultat qui n'est jamais rigoureusement la valeur vraie de la grandeur à mesurer. La valeur numérique sous-entend la précision par le nombre de chiffres significatifs indiqués. Les chiffres donnés sont ceux qui ont du sens, ce qui signifie que le chiffre suivant n'aurait pas de sens dans le contexte de la mesure effectuée.

Les chiffres significatifs sont tous les chiffres à partir du premier chiffre différent de zéro.

Combien de chiffres significatifs possèdent les nombres suivants ?

102.300 102.3 0102.3

Lors d'un calcul, les données sont parfois fournies avec des nombres de chiffres significatifs différents :

- Après une addition ou une soustraction, on conserve autant de décimales que la donnée qui en a le moins.

Écrire le résultat de l'opération suivante :

8,3567 + 2,23 =

- Après une multiplication ou une division, le résultat doit contenir le même nombre de chiffres significatifs que la donnée qui en contient le moins. On utilise pour cela l'écriture scientifique.

Écrire les résultats des opérations suivantes :

2,0*8,15 =

1512*2,3 =

Pour limiter le cumul d'erreurs sur les arrondis lors de calculs complexes, on évitera tout calcul intermédiaire.

II. Erreur et incertitude

1. Erreur

On appelle erreur la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie. Les erreurs sont de deux sortes :

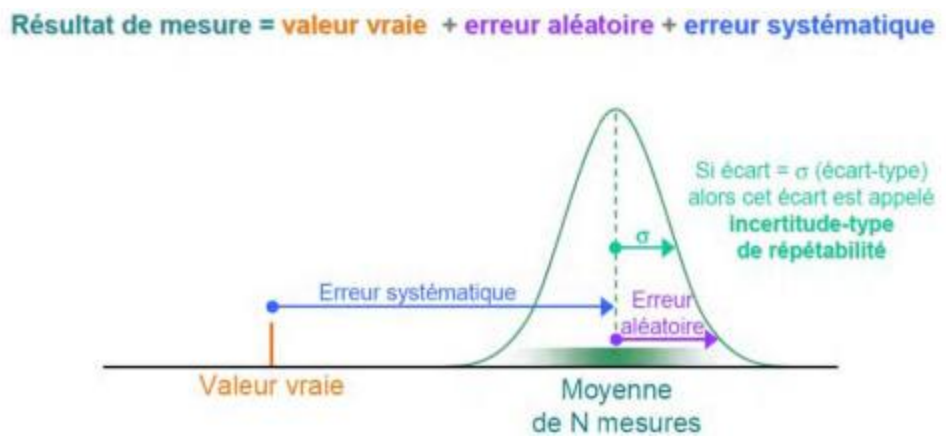
- Les **erreurs aléatoires** qui interviennent à chaque mesure et dont le sens par rapport à la valeur vraie est imprévisible. Ce sont ces erreurs qui sont traitées dans les calculs d'incertitudes par une étude statistique ;

- Les **erreurs systématiques** qui font apparaître un écart toujours dans le même sens par rapport à la valeur vraie. Les erreurs systématiques ont des origines diverses : défaut d'appareil, erreur d'étalonnage, procédure erronée…

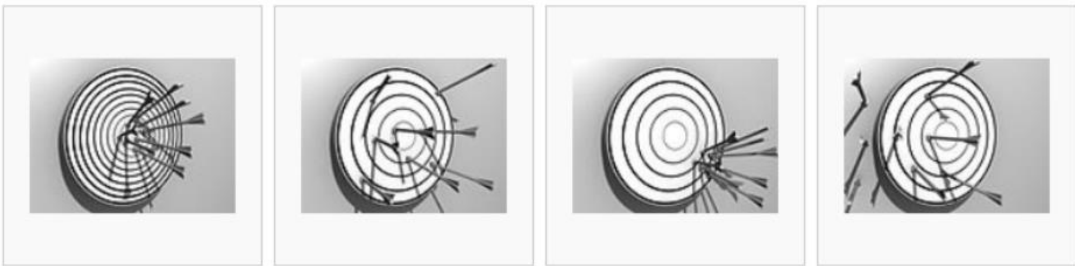
Lorsqu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule en opérant avec un chronomètre manuel, on constate qu'en répétant les mesures on trouve des résultats légèrement différents, dus surtout aux retards de déclenchement. Il s'agit d'**erreur aléatoire**.

Supposons maintenant qu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule avec un chronomètre faussé qui indique toujours des temps trop faibles. Il s'agit d'une **erreur systématique**.

Lors d'une mesure, l'erreur aléatoire peut prendre, au hasard, n'importe quelle valeur sur un certain intervalle. Par contre, l'erreur systématique peut être considérée comme constante.



On représente classiquement les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec un tir sur cible, le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :



- Si tous les impacts sont proches du centre : peu d'erreurs aléatoires et faible erreur systématique.

- Si les impacts sont très étalés mais centrés en moyenne sur la cible : beaucoup d'erreurs aléatoires et faible erreur systématique.
- Si les impacts sont groupés mais loin du centre : peu d'erreurs aléatoires et erreur systématique importante.
- Si les impacts sont étalés et loin du centre : beaucoup d'erreurs aléatoires et erreur systématique importante.

2. Ecriture du résultat d'une mesure

Afin d'estimer la variabilité du résultat de le mesure, on lui associe son **incertitude-type u(X)**. L'indication complète du résultat d'une mesure d'une grandeur physique X comporte alors : x, la valeur considérée comme étant la meilleure estimation et l'incertitude-type permettant de définir l'intervalle à l'intérieur duquel la vraie valeur a de fortes chances de s'y trouver :

$$\mathbf{X = (x \pm u(X))\ unité}$$

u(X) est écrite avec au plus 2 chiffres significatifs (arrondi par excès), x et u(X) ont le même nombre de décimales et la même unité.

Exemple : I = 50 ± 2 mA, indique que la valeur réelle du courant se situe entre 48 et 52 mA.

Remarques :

- *L'incertitude étant associée à la notion de probabilité, si après avoir déterminé l'intervalle, on refait une nouvelle mesure, on ne peut pas exclure qu'elle soit en dehors de l'intervalle.*
- *L'incertitude, lorsqu'elle est considérée seule, n'indique rien sur la qualité de la mesure : une incertitude de 3 mm n'a pas la même importance si la mesure est de l'ordre du centimètre ou du mètre. Pour juger de la qualité de la mesure, il faut comparer l'incertitude absolue à x. Le rapport de ces grandeurs, $\frac{u(X)}{x}$ est appelé **incertitude relative**. Cette incertitude est un nombre sans dimension qui caractérise la précision de la mesure.*

Il n'est pas possible de tenir compte des erreurs systématiques dans un calcul d'incertitude, c'est pourquoi on les supposera négligeables, quitte à revenir à la fin sur cette supposition en cas de désaccord entre la valeur trouvée et la valeur tabulée.

3. Evaluation de l'incertitude

On quantifie la dispersion des résultats de mesure par une grandeur mathématique, appelée **écart-type**. Plus l'écart-type est petit plus les résultats de mesure sont proches les uns des autres et resserrés autour de la valeur moyenne. Plus l'écart-type est grand plus les résultats de mesure sont éloignés les uns des autres et dispersés autour de la valeur moyenne.

L'incertitude-type est par définition l'écart type de la distribution des résultats obtenus lors d'un grand nombre de mesures.

Il existe deux types d'évaluation :

✓ **L'incertitude-type de type A** : cas de plusieurs mesures effectuées plusieurs fois dans les mêmes conditions, son évaluation utilise une méthode statistique.

- ✓ **L'incertitude-type de type B** : cas d'une mesure unique ou absence de variabilité, on l'évalue à partir des données du constructeur de l'appareil de mesure et d'hypothèses sur la qualité de la lecture réalisée sur l'appareil.

3.1 Evaluer une incertitude-type de type A ou incertitude de répétabilité

Soit n mesures effectuées dans les mêmes conditions expérimentales (même opérateur, même matériel, ...) donnant des valeurs mesurées x_k. En l'absence d'erreur systématique, on considère que la meilleur estimation de la valeur vraie de la grandeur cherchée est la moyenne des valeurs mesurées : $\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}$.

L'incertitude-type de type A est : $\boldsymbol{u_A(\bar{X}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ **où σ_{n-1} est l'écart type expérimental :**

$\boldsymbol{\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}}$**, le niveau de confiance est de 68%.**

Cette estimation, correcte dans le cas d'un grand nombre de mesures, devient imprécise si ce nombre est faible. Afin de tenir compte de cet effet, on fait intervenir un facteur d'élargissement k, qui dépend du nombre de mesure et du niveau de confiance requis.

Pour 5 mesures et un niveau de confiance de 95 %, k = 2.78, il vaut 4.60 pour un niveau de confiance de 99 %. Pour 10 mesures et un niveau de confiance de 95 %, k = 2.26, il vaut 3.25 pour un niveau de confiance de 99 %.

En l'absence de données sur la valeur de k, l'incertitude-type de type A élargie avec un niveau de confiance de 95% sera : $\boldsymbol{U_A(\bar{X}) = 2u_A(\bar{X}) = 2\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}}$.

3.2 Evaluer une incertitude-type de type B liée à l'instrument de mesure

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. C'est le cas si l'on fait une seule mesure ou si la répétition de la mesure conduit toujours au même résultat (*exemple : mesure de la taille d'un objet avec une règle graduée*). L'absence de variabilité n'implique pas une absence d'incertitude : la précision de la mesure est insuffisante pour observer une variabilité. La valeur mesurée n'a aucune raison d'être égale à la valeur vraie et il faut donc évaluer son incertitude.

L'incertitude-type de type B est calculée à partir du certificat d'étalonnage, de la documentation constructeur…

Appareil analogique (appareil à cadran, règle, ...)	$u(M) = \frac{1\text{ graduation}}{\sqrt{12}}$
Appareil numérique (voltmètre, ampèremètre,…)	$u(M) = \frac{\text{précision}}{\sqrt{3}} = \frac{p \times \text{lecture} + n \times \text{digit}}{\sqrt{3}}$ Les valeurs de p et n sont données par le constructeur, le digit est la plus petite unité affichable sur l'écran pour le calibre utilisé
Autre instrument (verrerie,...) avec la précision ou tolérance ($\pm t$) du constructeur	$u(M) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}}$

Remarque : Les incertitudes-types s'ajoutent selon la loi : $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots}$ *(exemple : lecture d'un volume sur une burette graduée : 2 incertitudes de lecture, le « zéro » et lecture du volume)*

3.3 Incertitude-type composée : propagation des incertitudes

L'incertitude-type composée est l'incertitude associée à une grandeur que l'on a calculée à partir de grandeurs mesurées.

On connait les grandeurs expérimentales x, y, ... et les incertitudes associées. Quelle est l'incertitude-type sur la grandeur q = f(x, y, ...) ?

Quelques exemples :

Combinaison linéaire $q = ax+by$ (a, b constantes) : $u_q = \sqrt{(au_x)^2 + (bu_y)^2}$

Produit ou quotient $q = xy$ ou $q = x/y$: $\left(\frac{u_q}{q}\right) = \sqrt{\left(\frac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{y}\right)^2}$