Devoir surveillé n° 8

Durée : 4h

❖ **Exercice n° 1** :

Un gaz réel a une équation d'état : $PV = nRT\left(1+\dfrac{na}{V}\right)$.

1) Donner l'expression des coefficients thermoélastiques α et χ_T.

2) Exprimer le travail des forces de pression s »exerçant sur un tel gaz dans le cas d'une transformation isotherme réversible entre un état A et un état B.

❖ **Exercice n° 2 : Sonder l'atmosphère (Centrale TSI 2008)**

L'atmosphère entoure toute la Terre et permet à toutes les espèces vivantes terriennes de respirer pour vivre. Les phénomènes physiques intervenant dans l'atmosphère sont nombreux et caractérisent en fait différentes couches en fonction de l'altitude : de la troposphère au niveau du sol jusqu'à l'ionosphère couche d'atmosphère la plus haute avant l'Espace.
On se propose dans ce sujet d'étudier la façon dont les météorologistes sondent les basses couches de l'atmosphère (troposphère et basse stratosphère) pour tenter de comprendre et de modéliser les phénomènes météorologiques, en vue notamment de répondre à la difficile question : « Quel temps fera-t-il demain ? ».

Données numériques :

Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4.10^3$ km
Accélération de la pesanteur au niveau du sol : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Constante des gaz parfaits $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Masse molaire de l'air $M_{air} = 29.10^{-3}$ kg.mol^{-1}
Masse molaire de l'hélium $M_{He} = 4{,}0\ 10^{-3}$ kg.mol^{-1}
On rappelle qu'à l'ordre 1 en ε : $(1+\varepsilon)^a = 1 + a\varepsilon$ *et* $e^{\varepsilon} = 1+\varepsilon$

Partie I - Modéliser l'atmosphère

Toute prévision météorologique est basée sur un modèle fiable de l'atmosphère, rendant compte en particulier de la pression, de la température et de l'hygrométrie (humidité de l'air) en différents points de l'espace. Des mesures expérimentales de ces grandeurs en fonction de l'altitude sont ainsi effectuées régulièrement à l'aide de ballons-sonde pour permettre d'affiner les modèles informatiques existants et de prévoir les éventuelles formations nuageuses.

Dans cette partie, le champ de pesanteur est uniforme, égal à sa valeur au niveau du sol. L'air sera toujours considéré localement comme un gaz parfait.

I.A - Modèle simple de l'atmosphère isotherme

On considère dans un premier temps le cas d'une atmosphère isotherme au repos, dans laquelle la température est uniforme et vaut $T_0 = 273$ K. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1$ bar $= 10^5$ Pa. On appelle P(z) la pression qui règne à l'altitude z.

I.A.1) Faire un bilan des forces s'exerçant sur une tranche de fluide de base, comprise entre les altitudes z et z+dz (figure 1). En déduire l'équation différentielle vérifiée par P(z).

I.A.2) Déterminer l'expression de la pression qui règne à l'altitude z.

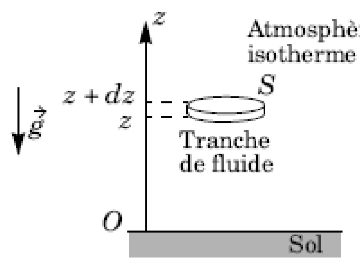

Figure 1 : tranche de fluide dans le modèle de l'atmosphère isotherme

Le tracé de P(z) est reporté sur la figure 3 ci-après (page suivante, courbe en pointillés).

I.A.3) Déduire de ce qui précède l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère isotherme dans le cadre de ce modèle. Faire l'application numérique. Montrer que l'on peut retrouver ces résultats graphiquement.

(Procédez par analogie avec la charge ou décharge d'un condensateur dans un circuit RC, qui s'effectue environ pendant 5τ, τ durée caractéristique du circuit RC)

I.B - Profil de température et de pression dans l'atmosphère réelle

Les données transmises par un ballon-sonde au cours de la traversée de la troposphère et de la basse stratosphère permettent de tracer les profils réels de température et de pression régnant à la verticale d'une station météo. Les résultats expérimentaux sont rassemblés sur la figure 2 ci-après.

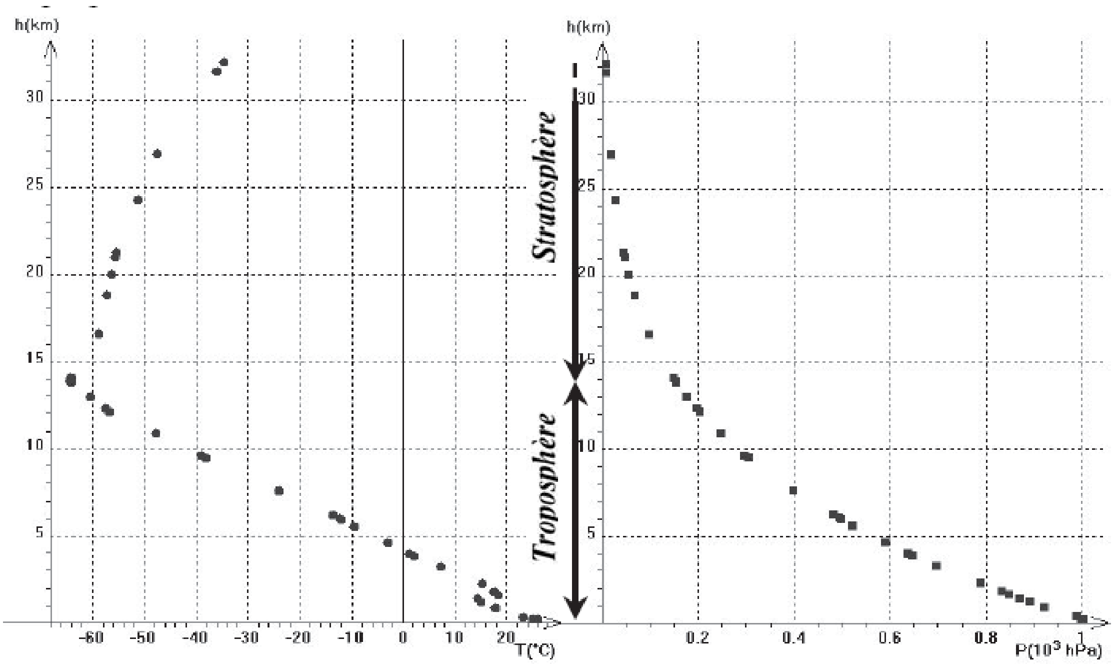

Figure 2 : relevés de température et de pression dans la troposphère et la stratosphère

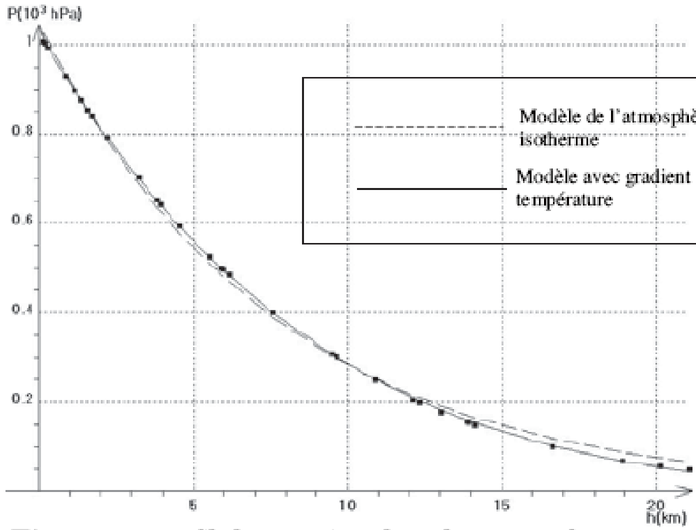

Figure 3 : profil de pression dans la troposphère ; en pointillés, modèle de l'atmosphère isotherme (voir question I.A) ; en trait plein, modèle avec gradient de température (voir question I.B.4).

I.B.1) Quelle différence essentielle y-a-t-il entre la stratosphère et la troposphère ?

I.B.2) Que pensez-vous du modèle vu en I.A.1 de l'atmosphère isotherme pour décrire la troposphère ? On comparera les profils réels de température et de pression avec les résultats du modèle (voir figure 3, courbe en pointillés).

On cherche à affiner le modèle précédent en considérant cette fois un profil de température de la forme :
$T = T_0 - az$ avec T_0 et a des paramètres constants.

I.B.3) Commenter le choix de ce profil de température et évaluer numériquement T_0 et a.

I.B.4) Montrer que le champ de pression dans la troposphère se met sous la forme $P(z) = P_0\,(1-bz)^{\alpha}$ où b et α sont des paramètres constants à déterminer.

I.B.5) Comparer alors ce champ de pression avec celui obtenu en I.A.1 pour l'atmosphère isotherme lorsque l'on se place à faible altitude ($bz \ll 1$).

Un logiciel informatique de traitement de données permet d'ajuster les valeurs de P_0, b et α pour que le modèle décrive correctement les points expérimentaux. On obtient ainsi : $P_0 = 1{,}03.10^5$ Pa, $b = 1{,}95.10^{-5}$ m^{-1}, $\alpha = 5{,}91$.
La courbe correspondante est tracée en trait plein sur la figure 3.

I.B.6) Déduire de ces résultats une autre détermination de T_0 et a et comparer aux valeurs trouvées en I.B.3. Conclure quant à la validité de ce modèle pour décrire la troposphère.

Partie II - Étude d'un ballon-sonde

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel scientifique de mesure, explorent par exemple toute la troposphère et la basse stratosphère. On se propose ici d'étudier quelques variantes d'un ballon-sonde stratosphérique : ballon ouvert à l'hélium, ballon fermé à l'hélium.
Dans toute cette partie, l'atmosphère est supposée isotherme, de température T_0 = 273 K, et le champ de pression est celui fourni par la figure 3 de la Partie I. La pression au niveau du sol vaut P_0 = 1 bar = 10^5 Pa.
Tous les gaz sont considérés comme parfaits. On négligera la force de frottement de l'air.

II.A - <u>Le ballon stratosphérique ouvert (B.S.O.)</u>

On considère le ballon-sonde, représenté sur la figure 4 ci-contre, composé :

- d'une enveloppe supposée sphérique, de volume V = 100 m^3 (correspondant à un diamètre de l'ordre de 6 m, ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon ;
- d'un parachute permettant de ralentir la descente du ballon à la fin de la mission ;
- d'un réflecteur radar rendant plus facile le suivi à distance du ballon ;
- d'une nacelle, contenant les appareils de mesure, le système de télécommunication et de positionnement GPS.

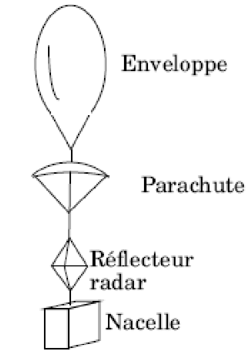

Figure 4 : Ballon-sonde

Dans ce type de ballon, l'enveloppe est indéformable et garde un volume constant.
Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On suppose que la température à l'intérieur du ballon reste constante, égale à la température extérieure T_0. La masse m de l'ensemble {enveloppe + parachute + réflecteur + nacelle} reste constante au cours du vol. Le volume du ballon est assimilé à celui de son enveloppe.

II.A.1) Le ballon-sonde étant prévu pour monter à quelques dizaines de kilomètres d'altitude, faut-il tenir compte de la variation du champ de pesanteur, assimilé ici au champ de gravitation terrestre, avec l'altitude ? Évaluer la variation relative maximale $\Delta g/g$ du champ de pesanteur entre le sol et l'altitude z = 20 km. Conclure.
II.A.2) Déterminer la masse de gaz contenue dans l'enveloppe au décollage.
II.A.3) Effectuer un bilan des forces précis s'exerçant sur le ballon au moment du décollage. En déduire une condition sur m pour que le ballon décolle effectivement. On considère dans la suite m = 10 kg.
II.A.4) Expliquer ce qui se passe dans le ballon au cours de son ascension.
II.A.5) Le plafond est atteint lorsque le ballon est à son altitude maximale. À quelle condition le ballon plafonne-t-il ? Estimer alors l'altitude maximale atteinte par le ballon-sonde.

Dès que le plafond est atteint, un système de largage libère le ballon de son enveloppe. Le ballon entame alors sa descente, ralentie par le parachute. Une fois retrouvés au sol, les appareils de mesure pourront servir une nouvelle fois pour une prochaine mission.

II.B - <u>Cas d'un ballon fermé</u>

Le ballon-sonde possède cette fois une enveloppe élastique fermée. Cette enveloppe est remplie d'une masse d'hélium m_{He} = 0,80 kg au moment du lancement. Les accessoires sont identiques à ceux du ballon vu en II.A. On suppose comme précédemment que la température à l'intérieur du ballon est identique à chaque instant à celle de l'air extérieur T_0. Les observations indiquent que le ballon a un diamètre de 2 m au décollage pour atteindre son diamètre maximal de 4,6 m, juste avant que l'enveloppe n'éclate à son altitude maximale.

II.B.1) Expliquer qualitativement les phénomènes qui provoquent l'éclatement du ballon.

L'élasticité de l'enveloppe s'explique par les propriétés de tension superficielle du matériau, qui imposent la relation suivante entre la pression intérieure du ballon et la pression extérieure de l'air (formule de Laplace) :
$P_{int} - P_{ext} = 4\sigma/r$ où σ est appelé coefficient de tension superficielle et r le rayon de l'enveloppe sphérique.

II.B.2) Préciser l'unité de σ et calculer numériquement sa valeur.
II.B.3) Déterminer l'altitude maximale atteinte par le ballon-sonde.

<u>Exercice n° 3</u> : La plongée sous-marine (Mines MP 2004)

Si la plongée sous-marine apporte des joies multiples, elle présente aussi des dangers, liés aux aspects physiologiques et anatomiques du corps humain.

I. Plongée libre (sans bouteille)

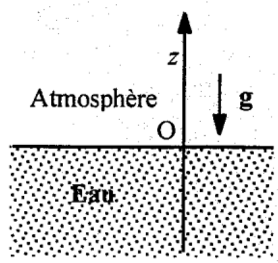

Fig. 1

L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique ρ =1,0x10^3 kg.m^{-3}, en équilibre dans le champ de pesanteur **g** uniforme avec, g = 9,81 m.s^{-2}.

La surface libre de l'eau (z =0) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante P_{atm} =1,013. 10^5 Pa.

1) Déterminer, littéralement et numériquement, la pression p(z) de l'eau en un point de cote z ; tracer le graphe de p(z).

2) On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait ; cet air est caractérisé par une pression p(z) identique à celle de l'eau à la cote z, un volume V(z) (capacité pulmonaire) variable (la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression), et enfin par une température T_i, constante et indépendante de la profondeur. Calculer la capacité pulmonaire du plongeur à une cote z sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale V_M puis bloque sa respiration.

3) On donne z = –10 m et V_M = 7.10^{-3} m^3. On définit le poids apparent du plongeur comme la résultante de la poussée d'Archimède et des forces de pesanteur selon une verticale descendante. Comment varie –t-il lorsque la profondeur augmente : diminue-t-il ou augmente-t-il ?

4) Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres, les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accrochée à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. On appelle m la masse du plongeur, V*(z) le volume de son corps et V_o le volume de son corps hors celui de la cage thoracique, de sorte que V*(z)= V_0 + V(z). Quelle masse m_1 de lest choisir si l'on adopte comme règle de sécurité le fait que le plongeur doit avoir un poids apparent nul à la profondeur de 5 mètres ?
Application numérique : V_0 = 0,077 m^3 et m= 80 kg.

II. Plongée avec bouteille et détendeur

Remplissage de la bouteille

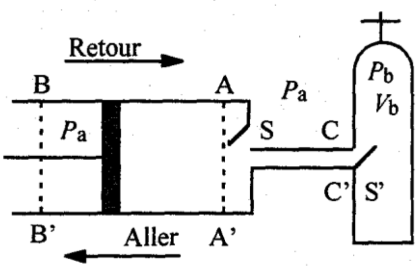

Fig. 2 : Compresseur

Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille à parois indéformables, de volume V_b, on utilise un compresseur (Fig. 2) constitué d'un cylindre, de deux soupapes S et S' et d'un piston, mobile sans frottement entre les positions extrêmes AA' et BB'.

Lors de l'aller (phase d'aspiration) la soupape S est ouverte alors que S' est fermée ; on a alors admission de l'air atmosphérique dans le cylindre à la pression P_{atm}.

Lors du retour (phase de compression), l'air dans le cylindre est comprimé, de la pression P_a à la pression P_b ; la soupape S est fermée alors que la soupape S' s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient supérieure à celle de la bouteille P_b.

Quand le piston est en AA', le volume limité par le piston et la section CC' est V_{min} ; quand le piston est en BB', ce volume est égal à V_{max}.

Les transformations de l'air sont isothermes les températures dans le cylindre et dans la bouteille sont identiques, égales à la température T_a de l'atmosphère ; les transformations sont quasi-statiques ; l'air est toujours considéré comme un gaz parfait.

1) La pompe n'ayant pas encore fonctionné, l'état initial du système est le suivant :

   - Bouteille : pression P_b = P_{atm}, température T_b = T_a .
   - Cylindre : pression P_{atm} température T_a, position du piston AA'

   Le piston fait un aller et un retour. Déterminer la pression P_b à l'intérieur de la bouteille à la fin de cette transformation ; en déduire, sous l'hypothèse V_{min} << V_b, la variation Δn du nombre de moles contenues dans la bouteille.

   Application numérique : V_b = 5 x 10^{-3} m^3, V_{min} =2x 10^{-5} m^3, V_{max} =2x 10^{-3} m^3, T_a =293 K et R=8,31 J.mol^{-1}.K^{-1}

2) Le compresseur ayant fonctionné, on considère qu'à un instant t donné, la soupape S est ouverte alors que la soupape S' est fermée ; l'état du système est alors le suivant :

   - Bouteille : pression P_b= p, température T_b = T_a
   - Cylindre : pression P_{atm}, température T_a, position du piston AA' .

   Le piston fait un aller-retour.

   a) Déterminer le volume d'air V' dans le cylindre lorsque la soupape S' s'ouvre, puis, en fonction de p, V_b,, P_{atm}, V_{min} et V_{max}, la pression p' dans la bouteille à la fin de cette opération. *(aidez vous de schémas)*
   b) En déduire, en fonction des mêmes grandeurs, la variation Δp de la pression à l'intérieur de la bouteille.
   c) Déterminer la pression maximale p_{max} que l'on peut obtenir par ce procédé et interpréter le résultat obtenu.

3) Calculer Δp et p_{max} pour p = 0,2.l0^7 Pa, et en conservant les données numériques antérieures.

4) On considère l'instant t de la question 2, l'état du système étant identique. Le piston fait α allers-retours par seconde, la durée de chaque aller-retour est notée Δt ($\Delta t = 1/\alpha$). Etablir l'équation différentielle liant p et dp/dt (on assimilera $\Delta p/\Delta t$ à dp/dt).

5) Le compresseur ayant démarré à l'instant t = 0, les conditions initiales étant celles qui ont été définies à la question 4, déterminer la pression p(t) à un instant t quelconque. Compte tenu de l'inégalité V_{min} << V_b, on pourra poser $\tau = Vb / (\alpha V_{min})$.

6) Pour α = 4 allers et retours par seconde, calculer le temps T au bout duquel la pression p dans la bouteille est égale à 0,5x10^7 Pa.